ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Примеры и задачи по расчету показателей надежности систем с помощью логико-вероятностных методов при использовании ЗИП

Пример П4.1

Определить достаточную степень структурной избыточности в многосвязной ветвящейся пятиуровневой системе, если известно, что звенья сети идеально надежны, а линии связи имеют доверительные интервалы для вероятности неработоспособного состояния (0,05; 0,1). Система должна обеспечить коэффициент сохранения эффективности типа (4.84) не менее 0,99.

Решение

ЛФРС четырехсвязной системы ($s = 4$) имеем вид

$$f_5 = x_1 x_5 (x_{51} \vee x_{52} f_2 \vee x_{53} f_3 \vee x_{54} f_4), f_4 = x_4 (x_{41} \vee x_{42} f_2 \vee x_{43} f_3),$$
$$f_3 = x_3 (x_{31} \vee x_{32} f_2), f_2 = x_2 x_{21}.$$

Переход к смешанной форме дает

$$P_5^{(4)}(f_2, f_3, f_4) = p_1 p_5 (1 - q_{51} q_{52}^{f_2} q_{53}^{f_3} q_{54}^{f_4}), P_4^{(3)}(f_2, f_3) = p_4 (1 - q_{41} q_{42}^{f_2} q_{43}^{f_3}),$$
$$P_3^{(2)}(f_2) = p_3 (1 - q_{31} q_{32}^{f_2}), P_2^{(1)} = p_2 p_{21}.$$

После второго шага замещения имеем

$$P_5^{(3)}(f_2, f_3) = p_1 p_5 (p_4 (1 - q_{41} q_{42}^{f_2} q_{43}^{f_3})(1 - q_{51} q_{52}^{f_2} q_{53}^{f_3} q_{54}) +$$
$$+ (q_4 + p_4 q_{41} q_{42}^{f_2} q_{43}^{f_3})(1 - q_{51} q_{52}^{f_2} q_{53}^{f_3})).$$

После третьего шага имеем

$$P_5^{(2)}(f_2) = p_1 p_5 (p_3 (1 - q_{31} q_{32}^{f_2})(p_4 (1 - q_{41} q_{42}^{f_2} q_{43})(1 - q_{51} q_{52}^{f_2} q_{53} q_{54}) +$$
$$+ (q_4 + p_4 q_{41} q_{42}^{f_2} q_{43})(1 - q_{51} q_{52}^{f_2} q_{53})) + (q_3 + p_3 q_{31} q_{32}^{f_2})(p_4 (1 - q_{41} q_{42}^{f_2})(1 -$$
$$- q_{51} q_{52}^{f_2} q_{54}) + (q_4 + p_4 q_{41} q_{42}^{f_2})(1 - q_{51} q_{52}^{f_2}))).$$

После замещения f_2 получаем

$$K_э = P_в = p_2 p_{21} P_5^{(2)}(1) + (1 - p_2 p_{21}) P_5^{(2)}(0).$$

Чтобы получить из этой формулы коэффициент сохранения эффективности трехсвязной системы, надо положить $p_{51} = 0$, для двухсвязной системы дополнительно: $p_{52} = p_{41} = 0$, для односвязной системы: $p_{53} = p_{42} = p_{31} = 0$.

В частности, при одинаковых вероятностях $p_i = P_1$, $p_{ij} = 1 - q_{ij} = P_2 = 1 - Q_2$ формулы при различных s приобретают вид

$$K_э(s=4) = P_1^2 P_2 (P_1^2 (1-Q_2^2)(1-Q_2^3)(1+P_1P_2Q_2^3) + P_1\ (1-Q_2^2)(1+P_1P_2Q_2^2) +$$
$$+ P_1(1-P_1P_2)(1-Q_2^2)(1+P_1P_2Q_2^2) + (1-P_1P_2)^2(P_1(1-Q_2^2)+1-P_1P_2)),$$

$$K_э(s=3) = P_1^3 P_2 (P_1\ (1-Q_2^2)(P_1(1-Q_2^3)^2 + (Q_1 + P_1Q_2^3)(1-Q_2^2)) + (Q_1 + P_1Q_2^2)(P_1(1-$$
$$-Q_2^2)^2 + P_2(Q_1\ + P_1Q_2^2)) + (1-P_1P_2)(P_1(1-Q_2^2)^2 + P_2(Q_1 + P_1Q_2^2)) + P_2(1-P_1P_2)^2).$$

$$K_э(s=2) = P_1^3 P_2 (P_1(1-Q_2^2)(P_1(1-Q_2^2)^2 + P_2(Q_1 + P_1Q_2^2)) + P_1P_2^2(Q_1 + P_1Q_2^2) +$$
$$+ P_2(1-P_1P_2)(1+P_1P_2Q_2)).$$

Если теперь предположить, что все звенья идеально надежны, то формулы приобретают вид

$$K_э(4) = P_2((1-Q_2^2)(1-Q_2^3)(1+P_2Q_2^3) + (1-Q_2^2)(1+P_2Q_2^2)(1+Q_2)Q_2 + Q_2^2(1+P_2Q_2)),$$
$$K_э(3) = P_2((1-Q_2^2)((1-Q_2^3)^2 + Q_2^3(1-Q_2^2)) + ((1-Q_2^2)^2 + P_2Q_2^2)(1+Q_2)Q_2 + Q_2^2P_2),$$
$$K_э(2) = P_2^2((1-Q_2^2)(P_2(1+Q_2)^2 + Q_2^2) + Q_2(1+2Q_2P_2)).$$

Результаты вычислений коэффициента сохранения эффективности пятиуровневой системы первого класса при различных s, $P_1 = 1$, $P_2 = 0{,}90$–$0{,}95$ приведены в табл. П4.1.

Таблица П4.1. Результаты вычислений коэффициента сохранения эффективности пятиуровневой системы первого класса при различных s, $P_1 = 1$, $P_2 = 0{,}90$–$0{,}95$

s	$K_э$		
	$P_2 = 0{,}90$	$P_2 = 0{,}92$	$P_2 = 0{,}95$
1	0,6561	0,7164	0,8145
2	0,9769	0,9855	0,9946
3	0,9961	0,9980	0,9995

Из данных таблицы видно, что при $P_2 = 0{,}90$ следует выбрать $s = 3$, а при $P_2 = 0{,}95$ выбрать $s = 2$. Ввиду различий в структурных параметрах для границ доверительного интервала, необходимо уточнение вероятности P_2 путем сужения доверительного интервала. При этом надо иметь в виду, что при $s = 2$ коэффициент сохранения эффективности достигает заданного значения уже при $P_2 = 0{,}925$.

Пример П4.2

Найти коэффициент сохранения эффективности 5-уровневой трехсвязной ветвящейся системы с ограниченным перераспределением функций управления, задаваемым логическими формулами

$$\varphi_5 = f_{54} f_{53} \vee f_{52}, \varphi_4 = f_{43} f_{42} \vee f_{41}, \varphi_3 = f_{32} f_{31}.$$

Согласно этим формулам звено пятого ранга может управляться совместно звеньями четвертого и третьего ранга или единолично звеньями первого и второго рангов. Причем звено первого ранга, не имея прямой линии связи со звеном 5, может управлять им только через звено второго ранга. Звено четвертого ранга может управляться совместно звеньями третьего и второго рангов или единолично звеном первого ранга. Звено третьего ранга управляется совместно звеньями первого и второго ранга.

Решение

ЛФРС системы определяется системой логических уравнений

$$f_5 = x_5(x_{54}x_{53}f_4f_3 \vee x_{52}f_2),\ f_4 = x_4(x_{43}x_{42}f_3f_2 \vee x_{41}f_1),$$
$$f_3 = x_3(x_{32}x_{31}f_2f_1),\ f_2 = x_2(x_{21}f_1),\ f_1 = x_1.$$

Все эти формулы являются ФПЧЗ первого типа и не требуют преобразования. Замещение бесповторных переменных дает смешанную форму

$$P_5^{(4)}(f_2,f_3,f_4) = p_1p_5(1-q_{52}^{f_2}(1-(1-q_{53}^{f_3})(1-q_{54}^{f_4}))),$$
$$P_4^{(3)}(f_2,f_3) = p_4(1-q_{41}(1-(1-q_{42}^{f_2})(1-q_{43}^{f_3}))),\ P_3^{(2)}(f_2) = p_3p_{31}(1-q_{32}^{f_2}).$$

Далее следуют три шага замещения функций f_4, f_3 и f_2

$$P_5^{(3)}(f_2,f_3) = p_1p_5(p_4(1-q_{41}(1-(1-q_{42}^{f_2})(1-q_{43}^{f_3})))(1-q_{52}^{f_2}(1-(1-q_{53}^{f_3})p_{54}))+$$
$$+(q_4+p_4q_{41}(1-(1-q_{42}^{f_2})(1-q_{43}^{f_3})))(1-q_{52}^{f_2})),$$
$$P_5^{(2)}(f_2) = p_1p_5(p_3p_{31}(1-q_{32}^{f_2})(p_4(1-q_{41}(1-(1-q_{42}^{f_2})p_{43}))(1-q_{52}^{f_2}(1-p_{53}p_{54}))+$$
$$+(q_4+p_4q_{41}(1-(1-q_{42}^{f_2})p_{43}))(1-q_{52}^{f_2}))+(1-p_3p_{31}+p_3p_{31}q_{32}^{f_2})(1-q_{52}^{f_2})),$$
$$K_э = P_5 = p_5p_2p_{21}p_1(p_3p_{31}p_{32}(p_4(1-q_{41}(1-p_{42}p_{43}))(1-q_{52}(1-p_{53}p_{54}))+$$
$$+(q_4+p_4q_{41}(1-p_{42}p_{43}))p_{52})+(1-p_3p_{31}p_{32})p_{52}).$$

При одинаковой надежности звеньев ($p_i = P_1$) и линий связи ($p_{ij} = P_2$) имеем

$$K_э = P_1^3P_2(P_1P_2^2(P_1P_2^2(1+P_2Q_2)^2+P_2(Q_1+P_1Q_2(1-P_2^2)))+P_2\ (1-P_1P_2^2)).$$

Если $P_1 = 1$, а P_2 находится в интервале (0,90; 0,95), то $K_э$ принимает значения, приведенные в табл. 4.2.

Таблица П4.2. Коэффициент сохранения эффективности пятиуровневой системы второго класса

s	$K_э$		
	$P_2 = 0{,}90$	$P_2 = 0{,}92$	$P_2 = 0{,}95$
1	0,6561	0,7164	0,8145
2	0,4783	0,5578	0,6983
3	0,8679	0,8985	0,9410

Сравнивая условия функционирования систем первого и второго классов, видим, что возможность перераспределения функций управления существенно влияет на надежность системы, позволяя уменьшить риск отказа. Так при $s = 3$ и $P_2 = 0{,}90$ риск отказа в системе первого класса уменьшается в 19 раз по сравнению с системой второго класса, а при $s = 2$ и $P_2 = 0{,}95$ риск отказа снижается более чем в 50 раз. Заметим также, что надежность односвязной системы первого класса оказывается выше надежности двухсвязной системы второго класса.

Пример П4.3

В полносвязной пятиуровневой системе установлены следующие ряды приоритетности линий связи: 51, 52, 53, 54; 41, 42, 43; 31, 32. Необходимо найти вероятность работоспособного состояния системы и оценить влияние структурного параметра s на надежность системы.

Решение

Используя формулу (4.90) при $k \le 5$, последовательным замещением получаем

$$K_э(s=4) = p_1 p_5 (p_{51} + q_{51}(p_{52} p_2 p_{21} + q_{52}(p_{53} p_3 (p_{31} + q_{31} p_{32} p_2 p_{21}) + q_{53} p_{54} P_4))),$$

$$P_4 = p_4 (p_{41} + q_{41}(p_{42} p_2 p_{21} + q_{42} p_{43} p_3 (p_{31} + q_{31} p_{32} p_2 p_{21}))).$$

Результаты расчетов по этим формулам при различных s, $p_i = 1$, $p_{ij} = P_2$ приведены в табл. П4.3. Там же приведены значения степени потери эффективности системы при переходе от полного оповещения к неполному $\delta = (1 - K_{эн})/(1 - K_{эп})$.

Таблица П4.3. Коэффициент сохранения эффективности системы с оповещением о ЛС

s	$K_э$			δ		
	$P_2 = 0{,}90$	$P_2 = 0{,}92$	$P_2 = 0{,}95$	$P_2 = 0{,}90$	$P_2 = 0{,}92$	$P_2 = 0{,}95$
1	0,6561	0,7164	0,8145	1	1	1
2	0,9718	0,9818	0,9927	1,22	1,26	1,35
3	0,9785	0,9864	0,9948	5,51	6,80	10,4
4	0,9907	0,9940	0,9976	23,9	48,9	97,3

Из данных табл. П4.3 можно сделать следующие выводы:

- в двухсвязной системе коэффициент сохранения эффективности будет не менее 0,99 при вероятности работоспособного состояния линии связи не менее 0,945. В отличие от системы с полным оповещением здесь трехсвязная система не гарантирует уровень $K_э = 0{,}99$ при всех значениях из доверительного интервала (0,90; 0,95). Этот уровень достигается только при $P_2 \ge 0{,}93$;
- потеря эффективности от ненадежности элементов системы при неполном оповещении $1 - K_{эн}$ существенно возрастает по сравнению с системой с полным оповещением $(1 - K_{эп})$: на 22–35 % в двухсвязной системе, в 6,8–10,4 раза в трехсвязной и в 50–97 раз в полносвязной системе;
- варьируя алгоритмы выбора маршрутов и проводя расчеты при тех же P_1 и P_2, можем убедиться в том, что предложенный алгоритм оказывается лучшим среди других возможных при $s = 2$ и 4. При $s = 3$ лучшим является алгоритм с рядами приоритетности: 51, 54, 53, 52; 41, 43, 42; 31, 32.

Пример П4.4

В полносвязной пятиуровневой системе дополнительно к условиям примера П4.3 проводится оповещение узла 3 о состоянии линии связи 21, узла 4 о состоянии 21 и 31, узла 5 о состоянии 21, 31, 41. Поскольку состояние путей 5321, 5431 и 54321 неизвестно полностью, то алгоритм выбора маршрута дополняется рядом приоритетности направлений связи: 1) 53, 54; 2) 54, 53. Вероятности работоспособного состояния узлов одинаковы и равны p_1, линий связи также одинаковы и равны p_2. Найти коэффициент сохранения эффективности типа (4.84).

Решение

Для первого варианта алгоритма выбора маршрута ЛФРС имеет вид

$$f_5 = x_5 x_1 (B_5 \vee B_5' (x_{53} f_3 \vee (x_{53} f_3)' x_{54} f_4),$$
$$B_5 = x_{51} \vee x_{52} x_2 x_{21} \vee x_{53} x_3 x_{31} \vee x_{54} x_4 x_{41},$$
$$f_4 = x_4 (x_{41} \vee x_{42} x_2 x_{21} \vee x_{43} f_3), f_3 = x_3 (x_{31} \vee x_{32} x_2 x_{21}).$$

После преобразования к ФПЧЗ получим

$$f_5 = x_5 x_1 (B_5 \vee x_{51}' (x_{31}' x_{52}' (x_{54} x_4 x_{41})' x_{53} x_3 x_{32} x_2 x_{21} \vee$$
$$\vee x_{41}' (x_{53} x_3)' (x_{52} x_2 x_{21})' x_{54} x_4 (x_{42} x_2 x_{21} \vee x_{43} f_3))).$$

Здесь все три слагаемых ортогональны. Поэтому замещение в них проводим независимо друг от друга. В первых двух слагаемых все переменные бесповторны. Поэтому проводим одношаговое замещение по правилам для ФППЗ. В третьем слагаемом повторяются x_3, x_2 и x_{21}. По правилам частичного замещения получим

$$K_э (x_3, x_2, x_{21}, f_3) = p_1 p_5 (C_1 + C_2 + C_3 q_{53}^{x_3} q_{52}^{x_2 x_{21}} (1 - q_{42}^{x_2 x_{21}} q_{43}^{f_3})), C_3 = q_{51} q_{41} p_{54} p_4,$$
$$C_1 = 1 - q_{51} \prod_{i=2}^{4} (1 - p_{5i} p_i p_{i1}), C_2 = q_{51} q_{52} p_{53} q_{31} p_3 p_{32} p_2 p_{21} (1 - p_{54} p_4 p_{41}).$$

Замещая остальные переменные, найдем

$$K_э = p_1 p_5 (C_1 + C_2 + C_3 (p_2 p_{21} q_{52} (p_{53} p_3 ((1 - q_{31} q_{32})(1 - q_{42} q_{43}) + q_{31} q_{32} p_{42}) +$$
$$+ q_3 p_{42}) + (1 - p_2 p_{21}) q_{53} p_3 p_{31} p_{43})).$$

Для второго варианта алгоритма

$$f_5 = x_5 x_1 (B_5 \vee B_5' (x_{54} f_4 \vee (x_{54} f_4)' x_{53} f_3) .$$

После преобразований к ортогональной форме имеем

$$f_5 = x_5 x_1 (B_5 \vee x_{51}' x_{31}' x_{52}' (x_{54} x_4 x_{41})' x_{53} x_3 x_{32} x_2 x_{21} \vee$$
$$\vee x_{51}' x_{41}' (x_{53} x_3 x_{31})' (x_{52} x_2 x_{21})' (x_{42} x_2 x_{21} \vee x_{43} f_3) x_{54} x_4).$$

После перехода к смешанной форме получим

$$K_э (x_3, x_2, x_{31}, x_{21}, f_3) = p_1 p_5 (C_1 + C_4 + C_5 q_{53}^{x_3 x_{31}} q_{52}^{x_2 x_{21}} (1 - q_{42}^{x_2 x_{21}} q_{43}^{f_3})),$$
$$C_4 = q_{51} q_{52} p_{53} q_{31} p_3 p_{32} p_2 p_{21} (1 - p_{54} p_4), C_5 = q_{51} q_{41} p_{54} p_4 .$$

После замещения остальных переменных окончательно имеем

$$K_э = p_1 p_5 (C_1 + C_4 + C_5 (q_{52} p_2 p_{21} (q_{53} p_3 p_{31} (1 - q_{42} q_{43}) +$$
$$+ p_3 q_{31} (p_{32} (1 - q_{42} q_{43}) + q_{32} p_{42}) + q_{32} p_{42}) + p_3 p_{31} q_{53} p_{43} (1 - q_2 q_{21}))).$$

Расчеты показывают, что при $P_1 = 1$ алгоритм 2 дает более высокие значения коэффициента сохранения эффективности, чем алгоритм 1, во всем реальном диапазоне значений P_2 $(0{,}5 \le P_2 \le 1)$.

Пример П4.5

Система имеет структуру типа «дерево» с параметрами n и r_i. Звенья и линии связи имеют коэффициенты готовности p_i и p_{ij} соответственно. Найти распределение числа работоспособных ветвей и рассчитать коэффициент готовности системы при различных значениях допустимого количества отказавших ветвей $m = 0, 1, 2, 3, 4$. Известно, что $p_i = 0{,}999$, $p_{ij} = 1$, $n = 3$, $r_1 = r_2 = 16$.

Решение

Логическая функция работоспособности ветви имеет вид

$$f_n = x_n x_{n,n-1} f_{n-1},\; f_i = x_i x_{i,i-1} f_{i-1},\; i = 2...n-1\,.$$

Производящий полином для одной ветви

$$\Phi_n^{(n)}(z, f_{n-1}) = 1 + (z-1)P_n = 1 + (z-1)\,p_n(1 - q_{n,n-1}^{f_{n-1}})\,.$$

После возведения в степень $r_{n\text{-}1}$ и замещения $f_{n\text{-}1}$ получаем

$$\Phi_n^{(n-1)}(z, f_{n-2}) = q_{n-1} + p_{n-1}q_{n-1,n-2}^{f_{n-2}} + p_{n-1}(1 - q_{n-1,n-2}^{f_{n-2}})(1 + (z-1)\,p_n\,p_{n,n-1})^{r_{n-1}}\,.$$

Повторяя эти операции $n - 1$ раз, окончательно получим

$$\Phi_n(z) = q_1 + p_1((...(1 + (z-1)\,p_n\,p_{n,n-1})^{r_{n-1}}\,p_{n-1}p_{n-1,n-2} + 1 -$$

$$-p_{n-1}p_{n-1,n-2})^{r_{n-2}}\,p_{n-2}p_{n-2,n-3} + 1 - p_{n-2}p_{n-2,n-3})^{r_{n-3}} + ... + 1 - p_2 p_{21})^{r_1}\,.$$

Отсюда при $n = 3$, $r_1 = r_2 = 16$, $p_1 = p_2 = p$, $p_{ij} = 1$ получаем

$$\begin{aligned}\Phi_3(z) &= q + p((q+zp)^{16}\,p + q)^{16} = q + p\sum\nolimits_{i=0}^{16} C_{16}^i (q+zp)^{16i}\,p^i q^{16-i} = \\ &= q + p\sum\nolimits_{i=0}^{16} C_{16}^i p^i q^{16-i} \sum\nolimits_{j=0}^{16i} C_{16i}^j p^j q^{16i-j} z^j = \\ &= p^{273}z^{256} + C_{256}^1 p^{272} q z^{255} + C_{256}^2 p^{271} q z^{254} + ...\end{aligned} \qquad (\text{П}4.1)$$

Вычисляя первые члены этого полинома и подставляя в (4.79), найдем коэффициент готовности системы при различных значениях допустимого количества отказавших ветвей m. Результаты расчетов приведены в табл. П4.4.

Таблица П4.4. Коэффициент готовности ветвящейся системы типа «дерево»

m	0	1	2	3	4
$K_{гс}$	0,761	0,956	0,981	0,9829	0,9831

При расчетах по формуле (П4.1) можно использовать приближенное равенство $p^k \approx$ $\approx \exp(-kq)$, $q = 1-p$. Из табл. П4.4 видно, что увеличение избыточности (увеличение m) приводит к росту коэффициента готовности системы. Однако он возрастает неравномерно: быстро увеличивается при небольших m, затем рост существенно замедляется. Это происходит потому, что для готовности системы требуется работоспособное состояние всех звеньев первого и второго рангов, а вероятность этого события равна $p^{17} = 0{,}9831$. Дальнейшее увеличение $K_{гс}$ следует ожидать при $m \ge 16$.

Пример П4.6

Система имеет структуру с полносвязными ветвями и параметрами $n = 4$ и r_i , $i = 1, 2, 3$. Необходимо найти распределение числа работоспособных ветвей и рассчитать коэффициент готовности системы при следующих значениях коэффициентов готовности элементов: 1) $p_i = 0{,}99$, $p_{ij} = 1$; 2) $p_i = 1$, $p_{ij} = 0{,}99$. Коэффициенты разветвления $r_1 = 6$, $r_2 = 4$, $r_3 = 4$.

Решение

Логическая функция работоспособности

$$f_4 = x_4(x_{41}f_1 \vee x_{42}f_2 \vee x_{43}f_3), f_3 = x_3(x_{31}f_1 \vee x_{32}f_2), f_2 = x_2x_{21}f_1, f_1 = x_1 .$$

Производящий полином для одной ветви

$$\Phi_4^{(4)}(z, f_1, f_2, f_3) = 1 + (z-1)P_n = 1 + (z-1)p_4(1 - q_{41}^{f_1}q_{42}^{f_2}q_{43}^{f_3}) .$$

Возведение в степень r_3 и разрезание по f_3 дает

$$\Phi_4^{(3)}(z, f_1, f_2) = p_3(1 - q_{31}^{f_1}q_{32}^{f_2})(1 + (z-1)p_4(1 - q_{41}^{f_1}q_{42}^{f_2}q_{43}))^{r_3} +$$
$$+(q_3 + p_3q_{31}^{f_1}q_{32}^{f_2})(1 + (z-1)p_4(1 - q_{41}^{f_1}q_{42}^{f_2}))^{r_3} .$$

Теперь необходимо возвести в степень r_2 , провести разрезание по f_2 и заместить переменную x_1. Тогда

$$\Phi_4(z) = q_1 + p_1(p_2p_{21}(p_3(1 - q_{31}q_{32})(1 + (z-1)p_4(1 - q_{41}q_{42}q_{43}))^{r_3} +$$
$$+(q_3 + p_3q_{31}q_{32})(1 + (z-1)p_4(1 - q_{41}q_{42}))^{r_3})^{r_2} +$$
$$+(1 - p_2p_{21})(p_3p_{31})(1 + (z-1)p_4(1 - q_{41}q_{43}))^{r_3} + (q_3 + p_3q_{31})(1 + (z-1)p_4p_{41})^{r_3})^{r_2})^{r_1} .$$

Отсюда при $p_i = p$, $p_{ij} = 1$ имеем

$$\Phi_4(z) = q + p(q + pz)^R, R = r_1r_2r_3 .$$

Отсюда следует, что при идеально надежных линиях связи наличие обходных путей в сети через звенья промежуточных рангов не изменяет коэффициента готовности системы. Первые три коэффициента полинома имеют вид: $P_R = p^{R+1}$, $P_{R\text{-}1} = Rqp^R$, $P_{R\text{-}2} = 0{,}5R(R-1)q^2p^{R\text{-}1}$. Подставляя сюда значения параметров, получим следующие значения коэффициента готовности системы: $K_{гс} = 0{,}379$; $0{,}745$ и $0{,}923$ для $m = 0$, 1 и 2 соответственно. При $p_i = 1$, $p_{ij} = p$ вид полинома более сложный. Первые два коэффициента

$$P_R = p^{r_1}(pC_1^{r_2} + qC_2^{r_2})^{r_1}, P_{R-1} = rp^{r_1}(pC_1^{r_2} + qC_2^{r_2})^{r_1-1}(pB_1C_1^{r_2-1} + qB_2C_2^{r_2-1}),$$
$$B_1 = q^3r_3((1-q^2)(1-q^3)^{r_3-1} + q(1-q^2)^{r_3-1}), B_2 = pq^2r_3((1-q^2)^{r_3-1} + p^{r_3-2}),$$
$$C_1 = (1-q^2)(1-q^3)^{r_3} + q^2(1-q^2)^{r_3}, C_2 = p((1-q^2)^{r_3} + qp^{r_3} .$$

Отсюда при $p = 0{,}99$ имеем: $P_R = 0{,}99^6 * 0{,}9998 = 0{,}9313$, $P_{R\text{-}1} = 0{,}0048$. Из численных расчетов можно сделать три важных вывода:

- во-первых, в системе с полносвязными ветвями определяющим фактором является надежность звеньев ($K_{гс} = 0{,}9413$ при $p_i = = 1$ и $m = 0$ и только $0{,}923$ при $p_{ij} = 1$ и $m = 2$);

- во-вторых, при $p_i = 1$ коэффициент готовности системы определяется, по существу, надежностью шести линий связи между звеньями первого и второго рангов. «Вклад» остальных линий связи незначителен;
- наконец, следствием второго свойства является то, что введение небольшого числа избыточных ветвей практически не меняет коэффициент готовности системы. Существенного увеличения $K_{гс}$ следует ожидать лишь при $m \ge r_2 r_3 = 16$.

Пример П4.7

В полносвязной изотропной пятиуровневой ветвящейся системе передачи данных коэффициенты разветвления на уровнях равны соответственно r_1, r_2, r_3, r_4. Направления связи в рядах приоритетности расположены в порядке возрастания номеров (убывания рангов) узлов-получателей информации: 1, 2, ..., k–1, $2 \le k \le n$. Необходимо найти распределение числа работоспособных ветвей системы.

Решение

Согласно (4.104) производящий полином

$$\Phi_5^{(5)}(z, f_1, f_2, f_3, f_4) = 1 + (z-1)p_5(1 - q_{51}^{f_1} + q_{51}(1 - q_{52}^{f_2}) +$$
$$+ q_{51}q_{52}(1 - q_{53}^{f_3}) + q_{51}q_{52}q_{53}(1 - q_{53}^{f_4})).$$

После возведения в степень r_4 и замещения f_4 согласно (4.105) получим

$$\Phi_5^{(4)}(z, f_1, f_2, f_3) = P_4(f_1, f_2, f_3, 1)(\Phi_5^{(5)}(z, f_1, f_2, f_3, 1))^{r_4} +$$
$$+ Q_4(f_1, f_2, f_3)(\Phi_5^{(5)}(z, f_1, f_2, f_3, 0))^{r_4},$$
$$P_4 = 1 - Q_4 = p_4(1 - q_{41}^{f_1} + q_{41}(1 - q_{42}^{f_2}) + q_{41}q_{42}(1 - q_{41}^{f_1})).$$

Далее выполним возведение в степень r_3, замещение f_3, возведение в степень r_2, замещение f_2, возведение в степень r_1 и замещение f_1. Окончательно имеем

$$\Phi_5(z) = q_1 + p_1(P_2(1)(P_3(1,1)(P_4(1,1,1)\Phi_5^{(4)}(z,1,1,1,1) + Q_4(1,1,1)\Phi_5^{(4)}(z,1,1,1,0))^{r_3} +$$
$$+ Q_3(1,1)(P_4(1,1,0)\Phi_5^{(4)}(z,1,1,0,1) + Q_4(1,0,1)\Phi_5^{(4)}(z,1,1,0,0))^{r_3})^{r_2} +$$
$$+ Q_2(1)(P_3(1,0)(P_4(1,0,1)\Phi_5^{(4)}(z,1,0,1,1) + Q_4(1,0,1)\Phi_5^{(4)}(z,1,0,1,0))^{r_3} +$$
$$+ Q_3(1,0)(P_4(1,0,0)\Phi_5^{(4)}(z,1,0,0,1) + Q_4(1,0,0)\Phi_5^{(4)}(z,1,0,0,0))^{r_3})^{r_2})^{r_1}.$$

Отсюда можно получить полиномы для систем с меньшим числом уровней. Так $\Phi_4(z)$ получается при $p_{51} = p_{52} = p_{53} = 0$, $p_5 = p_{54} = r_4 = 1$, $\Phi_3(z)$ при $p_{41} = p_{42} = 0$, $p_4 = p_{43} = r_3 = 1$. Отсюда же можно получить формулы для трехсвязной и двухсвязной систем.

При оповещении о прямой линии связи ряд приоритетности путей содержит $s = n - 1$ путей в полносвязной системе, $M = 2s + 2 - n$ при $s + 2 \le n \le 2s + 1$ и ни одного при $n > 2s + 1$. Ряд приоритетности направлений связи содержит s направлений при $n \ge s + 3$; $s - 1$ при $n = s + 2$ и $s - 2$ при $n = s + 1$ (полносвязная система). Рассмотрим далее полносвязную систему.

Логическую функцию работоспособности представим в ортогональной форме в виде

$$f_k = x_k(B_k \vee (\bigvee_{j=1}^{k-3} x_{ki_j} x_{i_j} f_{i_j} g'_{i_j}(\mathop{\&}_{\nu=1}^{k-1}(x_{ji_\nu}\varphi_{i_\nu})'))), 3 \le k \le n,$$
$$B_k = (x_{k2}x_2x_{21} \vee \ldots \vee x_{k,k-1}x_{k-1}x_{k-1,1})f_1, g_k = x_k x_{k1} f_1, k \ge 3, \qquad (\text{П}4.2)$$
$$g_2 = f_2 = x_2 x_{21} f_1, g_1 = f_1 = x_1, \varphi_{i_\nu} = x_{i_\nu}, \nu \le j-1; \varphi_{i_\nu} = g_{i_\nu}, \nu \ge j.$$

После замещения в (П4.2) при $k = n$ переменных x_n и x_{ni} получим производящий полином для одной ветви

$$\Phi_n^{(n)}(z, f_1, f_2, ..., f_{n-1}, g_1, ...g_{n-1}) = 1 + (z-1)p_n(1 - \prod_{i=1}^{n-1} q_{ni}^{g_i} + \sum_{k=1}^{n-3}(1 - q_{ni_k}^{g'_{i_k} f_{i_k}})\prod_{\nu=1}^{n-1} q_{ni_\nu}^{\varphi_{i_\nu}}).$$

Далее разрезание проводится с помощью формулы

$$\begin{aligned}&\Phi_n^{(k-1)}(z, f_1, f_2, ..., f_{k-1}, g_3, ...g_{k-1}) = (P(g'_k f'_k = 1)\Phi_n^{(k)}(z, f_1, ..., f_{k-1}, 0, g_3, ...g_{k-1}, 0) + \\ &+P(g_k = 1)\Phi_n^{(k)}(z, f_1, ..., f_{k-1}, 0, g_3, ...g_{k-1}, 1) + \\ &+P(g'_k f_k = 1)\Phi_n^{(k)}(z, f_1, ..., f_{k-1}, 1, g_3, ...g_{k-1}, 0))^{r_{k-1}}, k = 3...n-1.\end{aligned} \quad (П4.3)$$

На последнем шаге имеем

$$\Phi_n(z) = q_1 + p_1(P(f_2 = 1)\Phi_n^{(2)}(z,1,1) + P(f_2 = 0)\Phi_n^{(2)}(z,1,0))^{r_1}. \quad (П4.4)$$

Во втором слагаемом (П4.3) принимаем для определенности $f_k = 0$, т. к. при $g_k = 1$ слагаемые, содержащие f_k, обращаются в ноль, независимо от значения f_k.

Пример П4.8

В системе, рассмотренной в примере П4.7, дополнительно в каждый узел поступает информация от смежных узлов о состоянии прямой линии связи с узлом 1. Найти распределение числа работоспособных ветвей.

Решение

Алгоритм выбора маршрута содержит в себе ряд приоритетности путей: 51, 521, 531, 541; 41, 421, 431; 31, 321. Неопределенность в выборе пути возникает на узле 5 при отказе путей 51 и 521 и линий связи 31 и 41, т. к. неизвестно состояние путей 5321, 5421 и 54321. При работоспособных узлах 3 и 4 и работоспособных связях 53 и 54 состояние этих путей зависит от состояния линий 32 и 42, которое неизвестно. В этом случае выбирается направление 54. Таким образом, алгоритм выбора маршрута дополняется рядом приоритетности: 54, 53. Логическая функция работоспособности (4.106) имеет вид

$$\begin{aligned}&f_5 = x_5(B_5 \vee B'_5 x_{54} f_4 \vee B'_5(x_{54} f_4)' x_{53} f_3), f_4 = x_4(x_{41} f_1 \vee x_{42} f_2 \vee x_{43} f_3), \\ &f_3 = x_3(x_{31} f_1 \vee x_{32} f_2), f_2 = x_2 x_{21} f_1, f_1 = x_1.\end{aligned}$$

Представим ее в виде

$$\begin{aligned}&f_5 = x_5(x_{51} f_1 \vee x_{52} f_2 \vee x_{53} g_3 \vee x_{54} f_4 \vee \vee(x_{51} f_1)'(x_{52} f_2)'(x_{53} g_3)'(x_{54} f_4)' x_{53} g'_3 f_3), \\ &g_3 = x_3 x_{31} f_1.\end{aligned}$$

Отсюда производящий полином для ветви

$$\Phi_5^{(5)}(z, f_i, g_i) = 1 + (z-1)p_5(1 - q_{51}^{f_1} q_{52}^{f_2} q_{53}^{g_3} q_{54}^{f_4} + q_{51}^{f_1} q_{52}^{f_2} q_{53}^{g_3} q_{54}^{x_4}(1 - q_{53}^{g'_3 f_3})).$$

При замещении переменных четвертого ранга рассмотрим три ситуации: $f_4 = 1$, $x_4 f'_4 = 1$, $x_4 = 0$. После возведения в степень и замещения получим

$$\begin{aligned}&\Phi_5^{(4)}(z, f_1, f_2, f_3, g_3) = p_4(1 - q_{41}^{f_1} q_{42}^{f_2} q_{43}^{f_3})(1 + (z-1)p_5(1 - q_{51}^{f_1} q_{52}^{f_2} q_{53}^{f_3} q_{54}))^{r_4} + \\ &+(p_4 q_{41}^{f_1} q_{42}^{f_2} q_{43}^{f_3})(1 + (z-1)p_5(1 - q_{51}^{f_1} q_{52}^{f_2} q_{53}^{g_3} + q_{51}^{f_1} q_{52}^{f_2} q_{53}^{g_3} q_{54}(1 - q_{53}^{g'_3 f_3})))^{r_4} + \\ &+q_4(1 + (z-1)p_5(1 - q_{51}^{f_1} q_{52}^{f_2} q_{53}^{f_3}))^{r_4}.\end{aligned}$$

При упрощении здесь использовано равенство: $g_3 \vee g_3' f_3 = f_3$. На следующем шаге возводим полином в степень r_3 и рассматриваем три несовместных события с вероятностями

$$P(g_3 = 1) = p_3 p_{31}, P(g_3' f_3 = 1) = p_3 q_{31}(1 - q_{32}^{f_2}), P(g_3' f_3' = 1) = q_3 + p_3 q_{31} q_{32}^{f_2} .$$

Далее возводим в степень r_2, замещаем $x_2 x_{21}$, возводим в степень r_1, замещаем x_1. Окончательно имеем

$$\Phi_5(z) = p_1(p_2 p_{21}(p_3 p_{31}(p_4(1 - q_{41}q_{42}q_{43})\varphi_1(z,1,1) + (q_4 + p_4 q_{41}q_{42}q_{43})\varphi_2(z,1,1))^{r_3} +$$
$$+ q_3 p_{31} p_{32}(p_4(1 - q_{41}q_{42}q_{43})\varphi_1(z,1,1) + q_4\varphi_2(z,1,1) + p_4 q_{41}q_{42}q_{43})\varphi_3(z,1,1))^{r_3} +$$
$$+ (q_3 + p_3 q_{31} q_{32})(p_4(1 - q_{41}q_{42})\varphi_4(z,1,1) + (q_4 + p_4 q_{41} q_{42})\varphi_5(z,1,1))^{r_3})^{r_2} +$$
$$+ (1 - p_2 p_{21})(p_3 p_{31}(p_4(1 - q_{41}q_{43})\varphi_1(z,1,0) + (q_4 + p_4 q_{41}q_{43})\varphi_2(z,1,0))^{r_3} +$$
$$+ (q_3 + p_3 q_{31})(p_4 p_{41})\varphi_4(z,1,0) + (q_4 + p_4 q_{41})\varphi_5(z,1,0))^{r_3})^{r_2})^{r_1} + q_1,$$

$$\varphi_1(z, f_1, f_2) = (1 + (z-1)p_5(1 - q_{51}^{f_1} q_{52}^{f_2} q_{53} q_{54}))^{r_4},$$
$$\varphi_2(z, f_1, f_2) = (1 + (z-1)p_5(1 - q_{51}^{f_1} q_{52}^{f_2} q_{53}))^{r_4},$$
$$\varphi_3(z, f_1, f_2) = (1 + (z-1)p_5(1 - q_{51}^{f_1} q_{52}^{f_2} (1 - p_{53} q_{54})))^{r_4},$$
$$\varphi_4(z, f_1, f_2) = (1 + (z-1)p_5(1 - q_{51}^{f_1} q_{52}^{f_2} q_{54}))^{r_4},$$
$$\varphi_5(z, f_1, f_2) = (1 + (z-1)p_5(1 - q_{51}^{f_1} q_{52}^{f_2}))^{r_4}.$$

Как и в примере П4.7, здесь также можно вести поиск желаемой структуры, варьируя структурные параметры и выбирая структуру по критерию надежности.

Пример П4.9

Найти вероятность безотказной работы системы с мостиковой структурой (см. рис. 4.7, *а*). Система оснащена комплектом ЗИП с периодическим пополнением запасов с периодом T = 4380 час. Следует рассмотреть пять вариантов компоновки структуры согласно табл. П4.5.

Таблица П4.5. Пять вариантов компоновки структуры

№	$k\lambda \cdot 10^5$, ч$^{-1}$	Вариант компоновки									
		1		2		3		4		5	
		Тип	L_i	Тип	L_i	Тип	L_i	Тип	L_i	Тип	L_i
1	10	1	1	1	2	1	2	1	4	1	5
2	10	2	1	1	–	2	2	1	–	1	–
3	10	3	1	3	1	1	–	1	–	1	–
4	10	4	1	4	1	2	–	1	–	1	–
5	10	5	1	5	1	5	1	5	1	1	–

В первом варианте все элементы различны, во втором варианте элементы 1 и 2 одинаковы, а остальные различны. В третьем варианте одинаковы элементы 1 и 3, 2 и 4. В четвертом варианте одинакового типа элементы 1–4. В пятом варианте все пять элементов одного типа. Общее количество запасных частей во всех вариантах одно и то же — 5, но количество типов ЗЧ соответствует количеству типов элементов в структуре системы.

Решение

В варианте 1 удается использовать схему Бернулли из моделей М1 и формулу (4.34):

$$P_c(t,L) = p_5(t,L_5)((1-q_1(t,L_1)q_2(t,L_2))(1-q_3(t,L_3)q_4(t,L_4)) +$$

$$+q_5(t,L_5)(1-(1-p_1(t,L_1)p_3(t,L_3))(1-p_2(t,L_2)p_4(t,L_4)))$$

$$p_i(t,L_i) = 1 - I(A, L_i + 1), A = k\lambda t \ . \quad (П4.5)$$

В варианте 2 проводим разрезание по элементу 5. При $x_5 = 1$ получаем схему Бернулли, в которую включены одна модель М2 и две модели М1. При $x_5 = 0$ получаем модель М15 со структурой, представленной на рис. 2.16, *а*. Для расчета характеристик структурных элементов используем формулы (2.15), (2.44), (2.50). Расчетные формулы для системы имеют вид:

$$P_c(t,L) = p_5(t,L_5)(\exp(-2k_1\rho_1 k_1\lambda_1 t/(1+3k_1\rho_1))(1-q_3(t,L_3)q_4(t,L_4)) +$$

$$+q_5(t,L_5)\exp(-t/\overline{T}_0(L_1,L_3,L_4)), k_1\rho_1 = -\ln(K_{гЗИП1}(A,L_1)), L_1 = 2 \ , \quad (П4.6)$$

где $K_{гЗИП}$ $(A,2)$ вычисляют по формуле (1.10), $k_1\lambda_1$ берут из первой строки таблицы исходных данных.

В варианте 3 после разрезания по элементу 5 при $x_5 = 1$ получаем модель М16, а при $x_5 = 0$ получаем схему Бернулли, в которую включены две модели М1 с удвоенным количеством элементов: $2k_1$ и $2k_2$. Для модели М1 используют формулы (4.113), а для модели М16 — формулы (2.55)–(2.56). Расчетные формулы для системы имеют вид:

$$P_c(t,L) = p_5(t,L_5)\exp(-t/\overline{T}_0(L_1,L_2)) + q_5(t,L_5)(1-q_1(t,L_1)q_2(t,L_2)) \ ,$$

$$L_1 = L_2 = 2, L_5 = 1 \ . \quad (П4.7)$$

При расчете средней наработки до отказа в моделях М15 и М16 можно использовать программу раскрытия определителей, например функцию `МОПРЕД` в Excel.

В варианте 4 после разрезания по элементу 5 при $x_5 = 1$ получаем модель М6, а при $x_5 = 0$ получаем модель М2 с удвоенным количеством элементов в каждой ветви дублированной системы: $2k_1$ при $L_1 = 4$. Расчетная формула для ВБР системы имеет вид:

$$P_c(t,L) = p_5(t,L_5)\exp(-\frac{4k_1\rho_1 k_1\lambda_1 t}{1+3k_1\rho_1}) + q_5(t,L_5)\exp(-\frac{8k_1\rho_1 k_1\lambda_1 t}{1+6k_1\rho_1}) \ . \quad (П4.8)$$

Формулы (П4.6)–(П4.8) содержат погрешность, связанную с экспоненциальным приближением зависимости ВБР от времени.

В варианте 5, используя формулу (4.111), получим для мостиковой структуры выражение для средней наработки на отказ:

$$k\lambda\overline{T}_{нс}(L) = \frac{p(1-q^2)^2 + q(1-(1-p^2)^2)}{p((1-q^2)^2 - p^2(2-p^2)) + 4qp^2(1+2pq)}, L = 5 \ , \quad (П4.9)$$

$$p = 1/(1+k\rho), k\rho = -\ln(K_{гЗИП}(A,5)), A = k\lambda T \ .$$

Поскольку средняя наработка на отказ меньше средней наработки до отказа, то оценка ВБР, полученная с помощью средней наработки на отказ, является нижней оценкой. Расчетная формула для ВБР системы имеет вид:

$$P_c(t,L) = \exp(-t/\overline{T}_{нс}(L)) \ . \qquad (П4.10)$$

Результаты расчетов приведены в табл. П4.6–П4.10.

Таблица П4.6. Вариант 1. $T = 4380$. $L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = L_5 = 1$

i	$k\lambda \cdot 10^5$, ч$^{-1}$	$K_{гЗИП}(T)$	$\Delta t_{ЗИП}(L)$,ч	$P(T)$	$k\lambda \cdot 10^5$, ч$^{-1}$	$K_{гЗИП}(T)$	$\Delta t_{ЗИП}(L)$,ч	$P(T)$
1	10	0,9742	261	0,9280	15	0,9476	359	0,8590
2	10	0,9742	261	0,9280	15	0,9476	359	0,8590
3	10	0,9742	261	0,9280	5	0,9928	144	0,9792
4	10	0,9742	261	0,9280	5	0,9928	144	0,9792
5	10	0,9742	261	0,9280	10	0,9742	261	0,9280
C	50	0,8774	261	0,9890	50	0,8623	296	0,9793

Таблица П4.7. Вариант 2. $T = 4380$. $L_1 = 2$, $L_3 = L_4 = L_5 = 1$

i	$k\lambda \cdot 10^5$, ч$^{-1}$	$K_{гЗИП}(T)$	$\Delta t_{ЗИП}(L)$,ч	$P(T)$	$k\lambda \cdot 10^5$, ч$^{-1}$	$K_{гЗИП}(T)$	$\Delta t_{ЗИП}(L)$,ч	$P(T)$
1,2	20	0,9832	84,8	0,9928	15	0,9555	152	0,9724
3	10	0,9742	261	0,9280	5	0,9928	144	0,9792
4	10	0,9742	261	0,9280	5	0,9928	144	0,9792
5	10	0,9742	261	0,9280	10	0,9742	261	0,9280
C	50	0,9090	191	0,9848	50	0,9175	172	0,9720

Таблица П4.8. Вариант 3. $T = 4380$. $L_1 = 2$, $L_2 = 2$, $L_5 = 1$

i	$k\lambda \cdot 10^5$, ч$^{-1}$	$K_{гЗИП}(T)$	$\Delta t_{ЗИП}(L)$,ч	$P(T)$*	$k\lambda \cdot 10^5$, ч$^{-1}$	$K_{гЗИП}(T)$	$\Delta t_{ЗИП}(L)$,ч	$P(T)$*
1,3	20	0,9832	84,8	0,9855	15	0,9555	152	0,9885
2,4	10	0,9832	84,8	0,9958	5	0,9973	27,1	0,9993
5	10	0,9742	261	0,9280	10	0,9742	261	0,9280
C	10	0,9417	120	0,9863	50	0,9283	149	0,9892

* В первой и второй строках указаны значения ВБР при $x_5 = 1$ и $x_5 = 0$.

Таблица П4.9. Вариант 4. $T = 4380$. $L_1 = 2$, $L_2 = 2$, $L_5 = 1$

i	$k\lambda \cdot 10^5$, ч$^{-1}$	$K_{гЗИП}(T)$	$\Delta t_{ЗИП}(L)$ч	$P(T)$*	$k\lambda \cdot 10^5$, ч$^{-1}$	$K_{гЗИП}(T)$	$\Delta t_{ЗИП}(L)$ч	$P(T)$*
1–4	40	0,9932	17,15	0,9970	30	0,9978	152	0,99929
5	10	0,9742	261,5	0,9941	20	0,9159	27,1	0,99857
C	50	0,9675	66,01	0,9968	10	0,9139	261	0,99913

* В первой и второй строках указаны значения ВБР при $x_5 = 1$ и $x_5 = 0$.

Таблица П4.10. Вариант 5. $T = 4380$. $L = 5$

i	$k\lambda \cdot 10^5$, ч$^{-1}$	$K_{гЗИП}(T)$	$\Delta t_{ЗИП}(L)$,ч	p	$k\lambda T_0(L)$	$P(T)$*
1–5	50	0,99553	44,8	0,99911	279	0,99804

Таблицы содержат много полезной информации, в частности, из них следует:

- увеличение коэффициента готовности ЗИП вовсе не означает увеличение ВБР и наоборот. Так в вариантах 3 и 4 изменение интенсивностей отказов элементов при сохранении интенсивности суммарного потока отказов приводит к снижению коэффициента готовности ЗИП и увеличению ВБР;
- неодинаковая надежность элементов может оказаться благоприятным фактором при сохранении интенсивности суммарного потока отказов. Такой эффект имеет место в вариантах 3 и 4.